Geht die Sonne morgen wieder auf? oder: Was lehrt die Vergangenheit über die Zukunft?

FRIEDRICH BARTH UND RUDOLF HALLER, MÜNCHEN

Zusammenfassung: *Aus einer fast nebensächlichen Bemerkung von* DAVID HUME *entstand ein Problem, das im Laufe der Zeit immer wieder bedeutende Mathematiker beschäftigte. Im Kern handelt es sich um die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit man das erneute Auftreten eines Ereignisses erwarten kann, wenn dieses Ereignis schon einige Male oder sogar immer bei den vorangegangenen Beobachtungen eingetreten ist.*

Auch für die Schule bietet sich die Behandlung dieses Problems an, weil dabei viele wichtige Aspekte angesprochen werden, die in der Reichweite von Schülern liegen: Anbindung an eine Fragestellung aus dem Alltags-Leben, die Rolle der Empirie bei wissenschaftlichen Untersuchungen, Modellbildung, Variation und Ausweitung einer Aufgabenstellung, Verwendung unterschiedlicher technischer Hilfsmittel wie bedingte und totale Wahrscheinlichkeit, anspruchsvollere algebraische Umformungen, Approximation von Summenwerten durch Integrale und schließlich mathematikhistorische und philosophische Bezüge. Am Ende all dessen steht eine überraschend einfache Formel, die eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage gibt.

1 Mit einem englischen Bischof und einem schottischen Philosophen beginnt es

1736 führt der anglikanische Bischof JOSEPH BUTLER (1692–1752) in der *Introduction* seiner *The Analogy of Religion* auf Seite I aus, dass die Beobachtung eines Ereignisses über Tage, Monate, ja Jahrhunderte hinweg, wie es die Menschheit getan hat, uns volle Sicherheit liefert, dass es wieder eintreten wird. Auf Seite IV schließt er daraus, dass niemand in Frage stellen könne, ob die Sonne morgen wieder aufgehen werde, und zwar sogar dort, wo sie immer schon aufgegangen ist, und auch wieder als kreisförmige Scheibe und nicht als Quadrat.

DAVID HUME (1711–1776)[1], der BUTLER sehr geschätzt hat, greift das Beispiel des Sonnenaufgangs 1739 in seinem *A Treatise of Human Nature* auf, bringt dabei aber seine grundsätzliche Skepsis in Bezug auf die Erfahrung zum Ausdruck: »Derjenige würde lächerlich erscheinen, der etwa sagen würde, es sei nur wahrscheinlich, dass die Sonne morgen aufgehen werde, oder dass alle Menschen sterben müssen, obgleich einleuchtet, dass wir von diesen Tatsachen keine weitere Gewissheit haben als diejenige, die uns die Erfahrung gibt.«[2]

1748 greift er dieses Bild vom Sonnenaufgang in seinen *Philosophical Essays concerning Human Understanding* nochmals auf: Im Gegensatz zu einem mathematischen Satz, der logisch sicher und damit sein Gegenteil falsch ist, ist »das Gegenteil eines jeden geschehenen Dinges allzeit möglich, weil es niemals einen Widerspruch in sich schließt […]. Dass die Sonne morgens nicht aufgehen werde, ist ein nicht weniger verständlicher Satz und schließt nicht mehr Widerspruch in sich als die Bejahung, dass sie aufgehen werde. Wir würden also vergeblich versuchen, die Falschheit desselben zu beweisen.«[3]

HUME stellt klar, »dass die Annahme, *the future resembles the past*, sich durch keinerlei Argument begründen lässt, sondern gänzlich aus der Gewohnheit herrührt, aus der wir für die Zukunft den gleichen Lauf der Dinge erwarten, wie wir ihn gewöhnt sind.«[4] Ihren mathematischen Niederschlag hat diese Gewohnheit im Maximum-Likelihood-Prinzip gefunden, das besagt, dass die beobachtete relative Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses ein guter Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens ist.

---

[1] HUME soll bereits als 11-Jähriger die Universität besucht haben; das juristische Studium brach er ab. Der in Frankreich verfasste *Treatise* war ein Misserfolg, weswegen er ihn überarbeitet als *Philosophical Essays* herausbrachte. Seine mehrfach übersetzte *History of Great Britain* (ab 1754) machte ihn zu einem reichen Mann. Er ist der bedeutendste Vertreter der britischen Aufklärung. Ein Lehrstuhl für Philosophie wurde ihm aber verweigert.

[2] Book I *Of the Understanding*, Part III *Of knowledge and probability*, *Sect.* XI *Of the probability of chances*

[3] in Nr. 21 von Sect. IV *Sceptical Doubts concerning the Operations of the Understanding*

[4] *A Treatise on Human Nature*, Book I, Part III, Sect. XII *Of the probability of causes*

Stochastik in der Schule 31 (2011) 2, S. 6–17

HUMEs Skepsis lehrt uns also, dass wir keine sicheren Aussagen über die Zukunft treffen können; denn die Regelmäßigkeit und Gleichförmigkeit des bisherigen Geschehens beweist nicht, dass es auch in Zukunft stattfinden muss, selbst wenn wir es auch erwarten; es ist nicht logisch begründet. Alle Aussagen über die Zukunft sind somit mit einer Wahrscheinlichkeit behaftet, die von der Erfahrung beeinflusst wird. Auch unsere Modelle des Naturgeschehens mit ihren Gesetzen sind ja nur aufgrund empirischer Forschung gefunden worden, können also keinen Absolutheitsanspruch erheben.

2 Zwei englische Geistliche rechnen

RICHARD PRICE (1723–1791)[5] schickt 1763 nach dem Tod seines Freundes THOMAS BAYES (1702 bis 1761) – beide sind presbyterianische Geistliche – dessen Arbeit *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* an die *Royal Society* und fügt einen *Appendix* an, in dem er meint, die von BAYES aufgestellten Regeln auch auf zukünftige Ereignisse anwenden zu können, darunter auf das Problem des morgigen Sonnenaufgangs, der dadurch seinen Eingang in die Literatur über Wahrscheinlichkeit findet. PRICE ist sich aber bewusst, wie er am Ende des Beispiels schreibt, dass seine »Folgerungen [bezüglich des Sonnenaufgangs] ein totales Unwissen über die Natur voraussetzen«. Frei zusammengefasst liest sich das Beispiel von PRICE wie folgt:

> Lasst uns jemanden vorstellen, der neu in diese Welt kommt. Die Sonne wird sicher seine Aufmerksamkeit wecken. Nach ihrem ersten Untergang weiß er absolut nicht, ob er sie je wieder sehen wird. Nach ihrer Wiederkehr wird die Erwartung eines zweiten Aufgangs in ihm geweckt und er wird 3 zu 1 darauf setzen, dass sie wieder aufgehen wird. Je öfter sie aufgeht, desto größer wird er die Wahrscheinlichkeit für einen Aufgang am nächsten Tag einschätzen. Aber keine noch so große Anzahl von Aufgängen kann absolute Sicherheit erzeugen. Sei die Sonne eine Million Mal in regulären Abständen aufgegangen, dann lässt sich 2 hoch eine Million zu eins darauf setzen, dass sie am nächsten Ende eines solchen Intervalls wieder aufgehen wird. Und die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältnis dafür nicht größer sein wird als 1 600 000 zu eins ist 0,5352, und dass es nicht kleiner sein wird als 1 400 000 zu eins, ist 0,5105.

Um die Gedanken von PRICE besser verstehen zu können, gehen wir auf die ihnen zugrunde liegenden Betrachtungen von BAYES ein. Dieser formuliert das Anliegen seines Artikels zu Beginn folgendermaßen: »Gegeben sei die Anzahl der Fälle, in denen ein unbekanntes Ereignis eingetreten ist oder nicht eingetreten ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der dieses Ereignis bei einem einzigen Versuch eintritt, zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt.« Die Lösung findet sich in Satz 10, der in heutiger Schreibweise lautet:

Sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A eintritt. Sei ferner $H_{na} :=$ »A ist in n Versuchen a-mal eingetreten und b-mal nicht eingetreten«, $n = a + b$, dann gilt

$$P_{H_{na}}\left(x_1 \le p \le x_2\right) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x^a \cdot (1-x)^b \cdot \mathrm{d}x}{\int_0^1 x^a \cdot (1-x)^b \cdot \mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

Eine mögliche Begründung für diese Formel sieht folgendermaßen aus. Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_{H_{na}}\left(x_1 \le p \le x_2\right) = \frac{P\left(a\,\text{Treffer und } x_1 \le p \le x_2\right)}{P\left(a\,\text{Treffer}\right)}.$$

Man lässt zunächst nur eine endliche Anzahl k von Werten p_i mit $x_1 \le p_i \le x_2$ für die Wahrscheinlichkeit p zu. Die Ereignisse »$p = p_i$« sind disjunkt. Man gliedert den Versuch in zwei Stufen: Auf der ersten Stufe wird die Erfolgswahrscheinlichkeit p_i bestimmt. Auf der zweiten Stufe wird mit dieser Erfolgswahrscheinlichkeit $(a+b)$-mal (unabhängig) gezogen (Bernoulli-Kette mit p_i). Im Nenner fragt man nach der Wahrscheinlichkeit von a Treffern; diese ist nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\sum_{i=1}^{k} P\left(p = p_i\right) \cdot \binom{a+b}{a} \cdot p_i^a \cdot \left(1 - p_i\right)^b.$$

Lässt man nun aber für p alle reellen Werte aus [0; 1] zu, dann wird aus dieser Summe das Integral

$$\int_0^1 f\left(p\right) \cdot \binom{a+b}{a} \cdot p^a \cdot \left(1-p\right)^b \cdot \mathrm{d}p.$$

Dabei tritt die Dichtefunktion f der Wahrscheinlichkeit p an die Stelle der diskreten Wahrscheinlichkeitverteilung $P\left(p = p_i\right)$.

Über diese Dichtefunktion ist in den meisten Fällen nichts bekannt. Um überhaupt eine Aussage ma-

[5] PRICE wirkte aktiv am politischen Leben seiner Zeit mit. Seine *Observations on Civil Liberty and the Justice and Policy of the War with America* (1776) waren ein großer Erfolg und haben nicht unwesentlich zur Unabhängigkeitserklärung der amerikanischen Kolonien beigetragen.

chen zu können, nimmt BAYES an, dass die Wahrscheinlichkeit gleichmäßig über [0; 1] verteilt ist; d. h., $f(p)=1$.

Für den Zähler unterscheidet sich die Berechnung nur dadurch, dass die Werte von p auf das vorgegebene Intervall $[x_1; x_2]$ beschränkt sind, so dass man $\int_{x_1}^{x_2} \binom{a+b}{a} \cdot p^a \cdot (1-p)^b \cdot \mathrm{d}p$ erhält.

Da die Binomialkoeffizienten $\binom{a+b}{a}$ unabhängig von p sind, kann man sie vor die Integrale ziehen und erhält nach dem Kürzen schließlich Formel (1).

PRICE behandelt in seinem Appendix auch den Sonderfall, dass $a=n$ und $b=0$ ist, – wir schreiben dann statt H_{nn} kurz H_n. Er erhält aus (1)

$$P_{H_n}(x_1 \le p \le x_2) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x^n \cdot \mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n \cdot \mathrm{d}x} = x_2^{n+1} - x_1^{n+1}. \qquad (2)$$

Seinen weiteren Überlegungen legt PRICE die damals unter Nichtmathematikern verbreitete Vorstellung zugrunde, dass ein Ereignis als wahrscheinlich gilt, wenn die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens größer als ½ ist (Hald 1998, S. 145). Er berechnet daher aus (2)

$$P_{H_n}\left(\frac{1}{2} \le p \le 1\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}. \qquad (3)$$

Daraus folgt: Die Einsätze für eine faire Wette, dass ein Ereignis wieder eintritt, wenn es n-mal schon eingetreten ist, müssen sich wie die obigen Wahrscheinlichkeiten, also wie $2^{n+1}-1$ zu 1, näherungsweise wie 2^{n+1} : 1 verhalten.

Das bedeutet: Wenn ich darauf wetten will, dass der oben genannte Fall eintritt, muss ich z. B. $2^{n+1}-1$ € einsetzen, der Gegner hingegen nur 1 €. Gewinne ich die Wette, so erhalte ich als Auszahlung die beiden Einsätze, also 2^{n+1} €. Mein (Netto-)Gewinn ist 1 €. Verliere ich die Wette, so erleide ich allerdings einen hohen (Netto-)Verlust von $2^{n+1}-1$ €. Ich muss mir meiner Sache also sehr sicher sein, wenn ich diese Wette eingehe.

PRICE wendet seine Erkenntnisse nun auf das Problem des Sonnenaufgangs an und sagt, dass das erste Aufgehen der Sonne uns nur über das Phänomen informiert, so dass die Rechnung erst ab der ersten Wiederkehr beginnen dürfe.

So berechnet er als Erstes mit $n=a=1$ und $b=0$ aus (3) die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne wieder aufgeht, wenn sie schon einmal auf- und untergegangen ist:

$$P_{H_1}\left(\frac{1}{2} \le p \le 1\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Man kann also 3 : 1 darauf setzen, dass die Sonne ein zweites Mal wahrscheinlich wieder aufgehen wird.

Ebenso berechnet er aus (3) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sonne wahrscheinlich, also mit der Wahrscheinlichkeit $p \ge \frac{1}{2}$, wieder aufgehen wird, nachdem sie bereits eine Million Mal wiedergekehrt ist, zu $P_{H_{1.000.000}}\left(\frac{1}{2} \le p \le 1\right) = \frac{2^{1.000.001}-1}{2^{1.000.001}}$.

Man kann also rund $2^{1.000.001}$ zu 1 darauf setzen, dass die Sonne am nächsten Tag wahrscheinlich wiederkehren wird.[6]

Sei umgekehrt bei einer fairen Wette ein Wettverhältnis k : 1 vorgegeben. Dann gilt

P(»Gewinn«) : P(»Verlust«)

= P(»Gewinn«) : [1 – P(»Gewinn«)] = k : 1,

woraus sich die Wahrscheinlichkeit

P(»Gewinn«) = $\frac{k}{k+1}$

ergibt. Ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, auf das ich setze, größer als $\frac{k}{k+1}$, so bin ich sogar im Vorteil. Damit erhält man aus (2) die Beziehung

$$P_{H_n}\left(\frac{k}{k+1} \le p \le 1\right) = 1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+1}.$$

Mit ihr errechnet PRICE für den Fall, dass die Sonne eine Million Mal aufgegangen ist,

$$P_{H_{999.999}}\left(0 \le p \le \frac{1.600.000}{1.600.001}\right) = \left(\frac{1.600.000}{1.600.001}\right)^{10^6}$$
$$= 0{,}5352$$

[6] Bei PRICE steht $2^{1\ \text{Million}}$: 1. Ist es nur eine stärkere Rundung oder, wie ZABELL vermutet, ein Fehler? Ihm zufolge spricht PRICE zwar davon, dass die Sonne eine Million Mal wiedergekehrt sei, legt seiner Rechnung aber die eine Million als beobachtete Sonnentage zugrunde, so dass die Sonne nur 999 999-mal wiedergekehrt sei. So erhält PRICE tatsächlich $P_{H_{999.999}}\left(\frac{1}{2} \le p \le 1\right) = \frac{2^{1.000.000}-1}{2^{1.000.000}}$, also den gerundeten Einsatz $2^{1\ \text{Million}}$: 1. Für ZABELLs Auffassung spricht, dass sich dieser Fehler bei BUFFON wieder findet. (Zabell 1988).

und

$$P_{H_{999.999}}\left(\frac{1.400.000}{1.400.001} \le p \le 1\right) = 1 - \left(\frac{1.400.000}{1.400.001}\right)^{10^6}$$
$$= 0{,}5105.$$

Die dabei verwendeten Werte von k, nämlich $1{,}6 \cdot 10^6$ bzw. $1{,}4 \cdot 10^6$, hat PRICE so gewählt, dass es vorteilhaft ist, darauf zu wetten, dass p nicht größer ist als $\frac{1.600.000}{1.600.001} = 0{,}999999375$ und dass es vorteilhaft ist, darauf zu wetten, dass p nicht kleiner ist als $\frac{1.400.000}{1.400.001} = 0{,}999999286$.

PRICE unterscheidet in seinen Überlegungen nicht klar zwischen der von ihm vorgenommenen Intervallschätzung für eine Wahrscheinlichkeit und der gesuchten Wahrscheinlichkeit für die Vorhersage eines Ereignisses. Er hätte eigentlich $P_{H_n}(H_{n+1})$ bestimmen müssen. Das wird erst LAPLACE 1774 machen, wie wir sehen werden.

GEORGES LOUIS LE CLERC DE BUFFON (1707 bis 1788) schmückt in Abschnitt VI seines um 1760 geschriebenen *Essai d'Arithmétique morale*, erschienen 1777, das PRICE'sche Beispiel des Sonnenaufgangs aus. Wie bei PRICE beginnt auch bei ihm das Experiment erst mit dem zweiten Tag. »Wenn man dann das Alter der Welt und damit unsere Erfahrung auf 6000 Jahre oder 2.190.000 Tage begrenzen will«,[7] dann ist die Sonne in unseren Breiten – denn nördlich des Polarkreises trifft dies nicht zu – 2.190.000-mal aufgegangen.

Die Wahrscheinlichkeiten für einen Aufgang am nächsten Morgen werden also wie die Folge 1, 2, 4, 8, … 2^i, … , $2^{2.189.999}$ zunehmen, eine Aussage, die keinen Sinn macht. Aus Abschnitt IX geht hervor, dass BUFFON damit die folgende Vorstellung zum Ausdruck bringen will. Geht die Sonne jeden Tag wieder auf, und berechnet man die Wettquotienten täglich neu, dann verhalten sich diese nahezu (siehe oben im Anschluss an (3)) wie die Folge dieser Zahlen, wenn man auf die Wiederkehr setzt. Eigentlich hätte am Schluss korrekt $2^{2.190.000}$ stehen müssen; BUFFON übernimmt also den PRICE'schen Fehler.

3 Ein französischer Mathematiker bringt das Problem auf den Punkt

1774 erscheint in den *Mémoires de Mathématique et Physique* das *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènemens* von PIERRE SIMON LAPLACE (1749–1827), der die Arbeit von THOMAS BAYES nicht kannte (Laplace 1774). In Abschnitt III stellt er das uns interessierende *Problème I*:

> Eine Urne enthalte eine unendliche Anzahl weißer und schwarzer Zettel von unbekanntem Mischungsverhältnis. Man ziehe daraus $w + s$ Zettel, von denen w weiß und s schwarz sind. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim nächsten Zug ein weißer Zettel gezogen wird.

Zur Lösung führt LAPLACE das unbekannte Mischungsverhältnis x ein[8] und nimmt an, dass jedes Mischungsverhältnis mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines weißen Zettels beim $(n+1)$-ten Zug[9] mit den obigen Bezeichnungen

$P_{H_{nw}}$(»Zettel weiß beim nächsten Zug«)

$$= \frac{\int_0^1 \binom{n}{w} \cdot \binom{1}{1} \cdot x^{w+1} \cdot (1-x)^s \cdot \mathrm{d}x}{\int_0^1 \binom{n}{w} \cdot x^w \cdot (1-x)^s \cdot \mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\int_0^1 x^{w+1} \cdot (1-x)^s \cdot \mathrm{d}x}{\int_0^1 x^w \cdot (1-x)^s \cdot \mathrm{d}x}.$$

Die Begründung für diese Behauptung verläuft wie oben bei PRICE. Die Integrale in Zähler und Nenner sind von gleicher Art; es handelt sich um die Euler'sche Betafunktion. In **8,** A 1 werden sie berechnet; bei Fichtenholz XIV, § 5 kann man Näheres nachlesen.

[7] Die lange weit verbreitete Auffassung, dass die Welt rund 6000 Jahre alt sei, geht auf die 1650 erschienenen *Annales veteris testamenti, a prima mundi origine deducti* des anglikanischen Bischofs JAMES USSHER (1581–1656) zurück. Dort gab dieser auf Grund seiner Berechnungen aus den im Alten Testament überlieferten Daten an, dass Gott die Welt in der Nacht vom 22. auf den 23. Oktober 4004 v. Chr. erschaffen habe. Dabei übernahm USSHER das Tagesdatum der Berechnung JOHN LIGHTFOOTs von 1644. USSHERs Ergebnis weicht nur wenig vom 18. März 3952 v. Chr. ab, den BEDA VENERABILIS (672/3–735) als Weltanfang ermittelt hatte. ISAAC NEWTON (1643–1727) errechnete in seiner postum 1728 erschienenen *The Chronology of Ancient Kingdoms Amended*, dass die Welt 534 Jahre jünger sei als USSHER angibt.

[8] Das Mischungsverhältnis x kann eine beliebige reelle Zahl aus (0; 1) sein.

[9] Da die Anzahl der Zettel unendlich groß ist, spielt es keine Rolle, ob man mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen zieht.

Für den Zähler ergibt sich mit den Parametern $\alpha = w+1$ bzw. $\beta = s$ der Wert $\frac{(w+1)! \cdot s!}{(w+s+2)!}$. Der Nenner wird mit $\alpha = w$ und $\beta = s$ zu $\frac{w! \cdot s!}{(w+s+1)!}$, so dass sich schließlich ergibt:

$$P_{H_{nw}}(\text{»Zettel weiß beim nächsten Zug«}) = \frac{w+1}{w+s+2} = \frac{w+1}{n+2}.$$

K. J. Bobek deutet dieses Ergebnis durch folgendes Zufallsexperiment: Die gezogenen w weißen und s schwarzen Zettel werden in eine neue Urne gelegt. Dann legt man einen weiteren weißen und weiteren schwarzen Zettel dazu. Für die Wahrscheinlichkeit, aus dieser Urne einen weißen Zettel zu ziehen, erhält man den obigen Ausdruck (Bobek 1891, S. 203 f.).

Von besonderem Interesse ist der Sonderfall, dass bei den ersten n Zügen kein schwarzer Zettel gezogen wurde, also $w = n$ und $s = 0$ ist. In diesem Fall gilt:

$$P_{H_{nw}}(\text{»Zettel weiß beim nächsten Zug«}) = \frac{n+1}{n+2}.$$

Rule of succession nennt John Venn (1834–1923) in seiner 1866 erschienenen *The Logic of Chance* diesen Ausdruck (Venn 1866, S. 152). In der englischsprachigen Literatur hat sich dieser Name durchgesetzt, im Deutschen findet sich keine entsprechende Formulierung. Wir prägen dafür den Terminus *Folgeregel*.

Zur Folgeregel kann man auch auf folgende Art und Weise gelangen.

4 Zwei Schweizer, ein Philosoph und ein Mathematiker, gehen der Sache auf den Grund

Am 6. November 1794 wird in der Berliner Akademie das *Mémoire sur l'art d'estimer la probabilité des causes par les effets* der beiden Schweizer Pierre Prevost (1751–1839) und Simon Antoine Jean Lhuilier (1750–1840)[10] vorgetragen (Prevost/Lhuilier 1799a), in dem sie die Gedanken Laplacens von 1774 u. a. auf das Ziehen aus einer Urne endlichen Inhalts mit Zurücklegen anwenden. Statt einer Urne bevorzugen sie aber einen m-flächigen Würfel, den sie n-mal werfen. Bleiben wir bei der Urne, zumal sie sie 1795 auch verwenden (s. u.), dann liest sich ihr zweites Problem (§ 20) wie folgt.

Eine Urne enthalte m Kugeln, von denen mindestens eine weiß ist, alle anderen aber schwarz. Man zieht daraus in n Zügen mit Zurücklegen n weiße Kugeln. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim nächsten Zug wieder eine weiße Kugel gezogen wird.

Die beiden Schweizer leiten das Ergebnis sehr kurz aus ihren vorausgehenden allgemeinen Sätzen her. Ausführlicher gestaltet sich der Lösungsweg so, wie ihn 1853 der Bischof von Edinburgh, Charles Hughes Terrot (1790–1872), und 1854 George Boole (1815–1864) in *An Investigation of the Laws of Thought* (Boole 1854, S. 368ff.) bringen.[11]

Es sei H_n = »Es wird n-mal mit Zurücklegen eine weiße Kugel gezogen«, $n \in \mathbb{N}$, und U_i = »Die Mischung in der Urne enthält i weiße Kugeln«, $i = 1, \ldots, m$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man beim nächsten Versuch wieder eine weiße Kugel? Gesucht ist also

$$P_{H_n}(H_{n+1}) = \frac{P(H_n \cap H_{n+1})}{P(H_n)} = \frac{P(H_{n+1})}{P(H_n)}.$$

Unter der (durchaus diskussionswürdigen) Annahme, dass die m Füllungen gleichwahrscheinlich sind, gilt $P(U_i) = \frac{1}{m}$ und $P_{U_i}(H_n) = \left(\frac{i}{m}\right)^n$ (vgl. Figur 1).

[10] Lhuilier war Mathematiker, Prevost hingegen zunächst Jurist; dann studierte er Philosophie und Wirtschaftswissenschaften, widmete sich den schönen Künsten, verfasste eine Dissertation über Poesie. 1780 wurde er Professor für Philosophie in Berlin, wo ihn Lagrange auf physikalische Probleme aufmerksam machte. Ab 1784 lehrte er in Genf Literatur, dann Philosophie und ab 1809 Physik. Weiteres zu den beiden Autoren entnehme man dem *Historischen Lexikon der Schweiz*, dem wir ebenso vertrauen wie der Originalarbeit der beiden Autoren und daher den Namen Prevost ohne Akzent schreiben, wenngleich er in anderen Nachschlagewerken mit Akzent geschrieben wird.

[11] Terrot behandelt in seiner Arbeit *Summation of Compound Series, and its Application to a Problem in Probabilities* (Terrot 1853) vor allem das Ziehen ohne Zurücklegen, widmet sich aber auch dem Ziehen mit Zurücklegen.

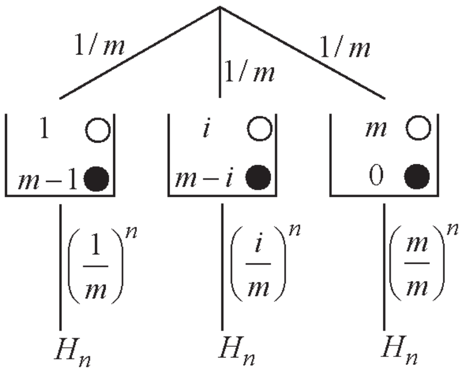


Fig. 1 H_n in Abhängigkeit vom Urneninhalt[12]

Mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit erhält man

$$P(H_n) = \sum_{i=1}^{m} P(U_i) \cdot P_{U_i}(H_n) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{i}{m}\right)^n$$

$$= \frac{1}{m^{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^{m} i^n$$

und analog, indem man n durch $n+1$ ersetzt,

$$P(H_{n+1}) = \frac{1}{m^{n+2}} \cdot \sum_{i=1}^{m} i^{n+1} .$$

Somit ist $\boxed{P_{H_n}(H_{n+1}) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} i^{n+1}}{\sum_{i=1}^{m} i^n}}$.

PREVOST und LHUILIER berechnen zunächst die Fälle $n = 1$ bzw. $n = 2$:

$$P_{H_1}(H_2) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\frac{1}{6} \cdot m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (m+1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3m} ,$$ [13]

$$P_{H_2}(H_3) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot m^2 (m+1)^2}{\frac{1}{6} \cdot (m+1)(2m+1)} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4(2m+1)} .$$

Dann aber widmen sie sich der wesentlich interessanteren Frage, was sich für $m \to \infty$ ergibt. Die Forderung $m \to \infty$ bedeutet ja, dass es unendlich viele Mischungsverhältnisse gibt, so wie es LAPLACE in seiner Abhandlung angenommen hat. Es gilt:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} i^{n+1}}{m \cdot \sum_{i=1}^{m} i^n} = \frac{n+1}{n+2} .$$

Das ist die Folgeregel. Die Begründung für diesen Grenzwert findet man in **8,** A 2.

Tabelle 1 soll eine Vorstellung von der Güte der Näherung $\frac{n+1}{n+2}$ vermitteln.

n	m	$\frac{1}{m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} i^{n+1}}{\sum_{i=1}^{m} i^n}$	$\frac{n+1}{n+2}$
	1	1,000 000	
1	2	0,833 333	0,666 667
	10^2	0,670 000	
	1	1,000 000	
2	2	0,900 000	0,750 000
	10^2	0,753 731	
	1	1,000 000	
	2	0,944 444	
3	10^2	0,803 973	0,800 000
	10^3	0,800 400	
	10^6	0,800 000	
	1	1,000 000	
	2	1,000 000	
100	10^2	0,994 330	0,990 196
	10^3	0,990 683	
	10^6	0,990 197	
	10^9	0,990 196	

Tabelle 1: Güte der Näherung

LAPLACE kommt 1783 in einem weiteren *Mémoire* auf seine Überlegungen zurück (Laplace 1786, S. 454) und berechnet die Wahrscheinlichkeit für $P_{H_1}(H_2)$, d. h., bei einem zweiten Versuch einen Erfolg zu haben, wenn man ihn beim ersten Versuch hatte, mit seiner Formel zu ⅔, – es ist nämlich $\frac{\int_0^1 x^2 \cdot dx}{\int_0^1 x \cdot dx} = \frac{2}{3}$ – und schreibt, »man könne 2 : 1 wetten, beim zweiten Versuch eine gleiche Kugel

---

[12] 1796 modellieren PREVOST und LHUILIER diese Mischungsverhältnisse durch m m-flächige Würfel, von denen der erste genau eine Eins, der zweite genau zwei Einsen, …, der m-te genau m Einsen auf seinen Flächen aufweist (Prevost/Lhuilier 1799c, Nr. 26).

[13] Der von PREVOST und LHUILIER angegebene Wert $\frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot (m-1)}$ ist falsch (Prevost/Lhuilier 1799a, S. 18).

zu ziehen wie beim ersten«, was zu mancher Kritik Anlass gab.

So schreibt 1843 ANTOINE AUGUSTIN COURNOT (1801–1877), dass man bei einer frisch geprägten Münze nicht 2 : 1 wetten würde, beim zweiten Wurf wieder Wappen zu erzielen, wenn Wappen beim ersten Wurf gefallen ist. Und noch weniger wird man 2 : 1 wetten, dass das zweite Kind ein Junge sein wird, wenn das erste ein Junge war (Cournot 1843, S. 163ff.). Man beachte den Unterschied zum Ergebnis 3 : 1 bei PRICE. Er berechnete nämlich nicht $P_{H_1}(H_2)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne nach einem ersten Aufgang wieder aufgehen wird, sondern $P_{H_1}\left(\frac{1}{2} \le p \le 1\right)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sonne nach dem ersten Aufgang *wahrscheinlich* wieder aufgehen wird.

LAPLACE übernimmt 1812 seine früheren Arbeiten in seine *Theorie Analytique des Probabilités*. 1814 kommt er in seinem *Essai philosophique sur les Probabilités* im VII. Prinzip darauf zurück und bringt auch den Sonderfall, dass nur weiße Kugeln gezogen wurden. Auch er illustriert ihn mit dem Sonnenaufgang. »Reiche die älteste Epoche der Geschichte auf 5000 Jahre oder 1 826 213 Tage zurück« – LAPLACE rechnet das Jahr mit 365,2426 Tagen – »und berücksichtigt man, dass die Sonne in diesem Zeitraum stets nach jeder Umdrehung von 24 Stunden aufgegangen ist, so ist 1.826.214 gegen eins zu wetten, dass sie auch morgen aufgehen wird. […] BUFFON berechnet in seiner politischen Arithmetik diese Wahrscheinlichkeit auf andere Art. Er nimmt an, dass sie von der Einheit nur um einen Bruch abweicht, dessen Zähler gleich eins ist und dessen Nenner gleich 2, erhoben zur Zahl der verflossenen Tage des Zeitraums. Aber die richtige Art, wie man von den vergangenen Ereignissen zur Wahrscheinlichkeit der Ursachen und der künftigen Ereignisse aufsteigt, war diesem berühmten Schriftsteller unbekannt.«

Kritik. Bei der Anwendung der Folgeregel muss man Vorsicht walten lassen. So zutreffend sie beim Ziehen von Kugeln aus einer Urne sein mag, so wenig lässt sie sich auf Naturvorgänge, die Naturgesetzen, aber nicht Zufallsprozessen unterworfen sind, anwenden. Der Sonnenaufgang ist ein denkbar schlechtes Beispiel. Es nimmt wunder, dass der Himmelsmechaniker LAPLACE dazu nicht kritisch Stellung genommen hat.

5 Die beiden Schweizer lösen das Problem

Am 12. November 1795 wird in der Berliner Akademie die Arbeit *Sur les Probabilités* der beiden Schweizer Mathematiker PIERRE PREVOST und SIMON ANTOINE JEAN LHUILIER vorgetragen,[14] die mit folgendem Problem beginnt.

Problême. Soit une urne contenant des billets de deux espèces (que j'appellerai blancs & noirs), dans un rapport inconnu. Soit tiré ſucceſſivement un certain nombre de ces billets, ſans remettre dans l'urne, à chaque extraction, le billet tiré. Connoiſſant le nombre des billets de chaque espèce qui ont été tirés, on demande la probabilité que tirant de la même manière de nouveaux billets, en nombre donné, il y en aura des nombres donnés de ces deux espèces.

Problem. Gegeben sei eine Urne, die Zettel von zweierlei Art enthält (ich nenne sie weiße und schwarze), und zwar in unbekanntem Verhältnis. Es werde nacheinander eine gewisse Anzahl von Zetteln gezogen, ohne den gezogenen Zettel nach jedem Zug wieder in die Urne zurückzulegen. Kennt man die Anzahl der Zettel, die von jeder Art gezogen wurde, so fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, eine vorgegebene Anzahl von Zetteln der beiden Sorten zu erhalten, wenn man auf dieselbe Art eine vorgegebene Anzahl weiterer Zettel zieht.

Nachdem bisher bei der Fragestellung des Sonnenaufgangs immer entweder von einer Urne unendlichen Inhalts, bei der es keine Rolle spielt, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird, oder endlichen Inhalts, aus der mit Zurücklegen gezogen wird, ausgegangen wurde, stellen die beiden als Erste die Frage nach dem Ziehen *ohne* Zurücklegen aus einer Urne *endlichen* Inhalts sogar in sehr allgemeiner Form. (Prevost/Lhuilier 1799b). Die Lösung dieses allgemeinen Problems gelingt nur unter erheblichem algebraischen Aufwand. Wir beschränken uns daher auf den einfachsten Fall.[15]

Die Urne enthalte m Kugeln, die entweder weiß oder schwarz sind, darunter i weiße, $i = 0, 1, \ldots, m$. Es werde n-mal, $n \le m$, eine weiße Kugel gezogen, die aber nicht mehr zurückgelegt wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man beim nächsten Zug wieder eine weiße Kugel?

Mit den Bezeichnungen von oben sei nun H_n = »Es wird n-mal ohne Zurücklegen eine weiße Kugel gezogen«, $n \in \mathbb{N}$, und U_i = »Die Mischung in der Urne enthält i weiße Kugeln«, $i = 0, 1, \ldots, m$. Gesucht ist also

[14] Diese Abhandlung sollte eigentlich ein Teil des *Mémoire* von 1794 sein (Prevost/Lhuilier 1799a), wurde aber wegen ihres umfangreichen mathematischen Teils abgetrennt und in der *Classe de Mathématique* vorgetragen statt, wie ursprünglich vorgesehen, in der *Classe de Philosophie Spéculative*.

[15] Einen ebenfalls sehr einfachen Fall dieses Problems führt EMANUEL CZUBER 1902, Seite 167, in Beispiel L vor unter Hinweis auf die Arbeit von PREVOST und LHUILIER.

$$P_{H_n}(H_{n+1}) = \frac{P(H_n \cap H_{n+1})}{P(H_n)} = \frac{P(H_{n+1})}{P(H_n)}.$$

Unter der Annahme, dass die $m+1$ Füllungen gleichwahrscheinlich sind, gilt $P(U_i) = \frac{1}{m+1}$ und

$$P_{U_i}(H_n) = \begin{cases} \frac{\binom{i}{n}\cdot\binom{m-i}{0}}{\binom{m}{n}} & \text{für} \quad i \geq n \\ 0 & \text{für} \quad i < n. \end{cases}$$

Unter den Urnen gibt es also $n-1$ Urnen, die zu wenig weiße Kugeln enthalten, um bei n Zügen n-mal eine weiße Kugel ziehen zu können. Es entsteht also die in Figur 2 wiedergegebene Situation.

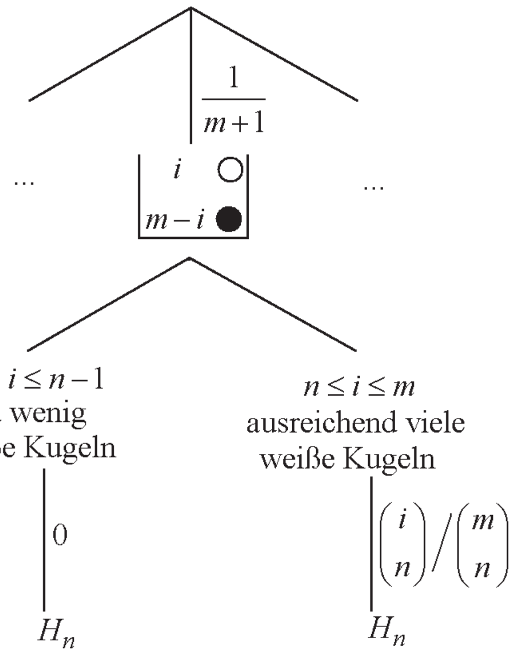


Fig. 2 H_n in Abhängigkeit vom Urneninhalt

Mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit erhält man daher für $P(H_n)$:

$$P(H_n) = \sum_{i=1}^{m} P(U_i)\cdot P_{U_i}(H_n)$$

$$= \frac{1}{m+1}\cdot\sum_{i=n}^{m}\frac{\binom{i}{n}}{\binom{m}{n}} = \frac{n!\,(m-n)!}{(m+1)!}\cdot\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}.$$

Für die Summe dieser Binomialkoeffizienten gilt $\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n} = \binom{m+1}{n+1}$. Zum Beweis siehe **8,** A 3. Damit wird

$$P(H_n) = \frac{n!\,(m-n)!}{(m+1)!}\cdot\binom{m+1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

und analog, wenn man n durch $n+1$ ersetzt,

$$P(H_{n+1}) = \frac{1}{n+2}.$$

Durch Division ergibt sich

$$P_{H_n}(H_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}.$$

Erstaunlicherweise ist beim Ziehen ohne Zurücklegen der Urneninhalt m wirklich ohne Bedeutung, und die Folgeregel gilt exakt.[16]

6 Nachklang

Das Problem des Sonnenaufgangs findet Ende des 19. Jh.s schließlich Eingang in gängige Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch in solche für das Selbststudium angezeigte, wie z. B. das 1891 erschienene *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung* des Deutschen K. J. BOBEK. Dreißig Jahre später zitiert es sogar JOHN MAYNARD KEYNES (1883–1946) in seinem *A Treatise on Probability* (Keynes 1921, S. 383). BOBEK stellt in seinem Lehrbuch eine amüsante Aufgabe. Um sie lösen zu können, müssen wir zuerst eine Erweiterung der Folgeregel herleiten.

> Eine Urne enthalte eine unendliche Anzahl weißer und schwarzer Zettel von unbekanntem Mischungsverhältnis. Man zieht daraus bei jedem von *n* Zügen einen weißen Zettel. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den nächsten *r* Zügen auch jedes Mal ein weißer Zettel gezogen wird.

Lösung: Es sei W_n = »Es wird n-mal eine weiße Kugel gezogen«, $n \in \mathbb{N}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P_{W_n}(W_{n+r})$. Man findet[17]

$$P_{W_n}(W_{n+r}) = \frac{P(W_n \cap W_{n+r})}{P(W_n)} = \frac{P(W_{n+r})}{P(W_n)}$$

$$= \frac{\int_0^1 x^{n+r}\cdot \mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n \cdot \mathrm{d}x} = \frac{n+1}{n+r+1} = 1 - \frac{r}{n+r+1}.$$

K. J. BOBEK wendet diese Formel auf die folgende Frage an (Bobek 1891, S. 208):

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne in den nächsten 4.000 Jahren täglich aufgehen

---

[16] Die Berechnung von $P_{H_n}(H_{n+1})$ bei der allgemeinen Fragestellung in den Arbeiten von PREVOST und LHUILIER bzw. TERROT ist mathematisch wesentlich anspruchsvoller.

[17] PREVOST und LHUILIER verwenden 1796 diese Formel, ohne sie herzuleiten (Prevost/Lhuilier 1799c, Nr. 19).

wird, wenn sie in den letzten 6.000 Jahren täglich aufgegangen ist? Mit

$n = 6.000 \cdot 365,25 = 2.191.500$ und

$r = 4.000 \cdot 365,25 = 1.461.000$ ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$1 - \frac{1.461.000}{2.191.500 + 1.461.000 + 1} \approx 60\,\% .$$

Ein überraschend geringer Wert! Man kann also – wenn man jedes Wissen über die zuständigen Naturgesetze außer Acht lässt und damit nur die Folgeregel für zutreffend hält – mit einer Wahrscheinlichkeit von etwas größer als ⅓ damit rechnen, dass die Sonne in den nächsten 4000 Jahren mindestens einmal nicht aufgehen wird. Wäre man dieses Problem mit dem Maximum-Likelihood-Prinzip angegangen, dann hätte man aufgrund der n erfolgreichen Versuche mit Wahrscheinlichkeit 1 angenommen, dass die Sonne in den nächsten 4000 Jahren täglich aufgehen wird. Damit wäre der Zufall eliminiert, was jedoch auch problematisch erscheint.

7 Epilog

JOHN MAYNARD KEYNES würdigt in seinem *A Treatise on Probability* die Folgeregel: „Die Folgeregel spielte in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitslehre eine äußerst wichtige Rolle. Es ist wahr, dass sie von BOOLE abgelehnt wurde, weil er die ihr zugrunde liegenden Voraussetzungen für willkürlich hielt, von VENN, weil sie nicht mit der Erfahrung übereinstimmt, von BERTRAND, weil sie lächerlich sei, und zweifellos auch noch von anderen.[18] Andererseits wurde sie auch von vielen akzeptiert – von DE MORGAN, JEVONS, LOTZE, CZUBER und von Professor PEARSON[19] – um nur einige Repräsentanten verschiedener Schulen und Epochen zu nennen.[20] Und auf alle Fälle ist die Folgeregel deswegen von Interesse, weil sie eines der charakteristischsten Ergebnisse der Auffassung von Wahrscheinlichkeit ist, wie sie LAPLACE eingeführt hatte, die bis heute keineswegs völlig verworfen wurde.“ (Keynes 1921, S. 382f.)

»Die Folgeregel ist eine einfache Konsequenz aus der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung des Binomialparameters« im Falle des totalen Nichtwissens (Hald, 1998, S. 268). Über die Rechtmäßigkeit dieser Annahme tobt der Streit zwischen Bayesianern und Nicht-Bayesianern. Die Folgeregel dient dazu, für die unbekannte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Falle des vollständigen Nichtwissens einen vernünftigen Schätzwert zu finden. Bereits PREVOST und LHUILIER diskutieren dieses Problem in ihren *Remarques*, die am 26. November 1796 vorgetragen werden (Prevost/Lhuilier 1799c).

Wir greifen ihre Gedanken auf und führen sie weiter aus. Stellen wir uns eine Münze vor, die noch nie geworfen wurde, und von der man nur weiß, dass sie auf mindestens einer Seite eine »Eins« trägt. Man möchte einen Wert für die Wahrscheinlichkeit angeben, mit der die »Eins« fallen wird. Dazu kann man verschiedene Strategien verfolgen.

- Man vermutet eine ideale 1/0-Münze und nimmt P(»1«) = ½ an.
- Man vermutet eine ideale Münze mit mindestens einer Seite »1«, also entweder 1/0 oder 1/1. Jeder dieser Möglichkeiten wird man die gleiche Wahrscheinlichkeit ½ zuerkennen, und damit für den ersten Wurf P(»1«) = ¾ annehmen, für den zweiten Wurf P(»1«) = ⅝, und für den n-ten Wurf P(»1«) = $\frac{2^n + 1}{2^{n+1}}$, wie man leicht nachrechnen kann. Für $n \to \infty$ konvergiert dieser Bruch gegen ½. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen erneuten Einswurf nach $n-1$ Einswürfen in Folge erhält man damit $\frac{2^n + 1}{2^n + 2}$, einen Wert, der (nicht überraschenderweise) gegen 1 konvergiert.
- Man vermutet, dass die Münze nicht ideal ist, und sucht einen Schätzwert für P(»1«). Man wird einige Würfe beobachten und nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip P(»1«) durch die relative Häufigkeit abschätzen. Nach zehn aufeinander folgenden »Eins«-Würfen hätte man dann beispielsweise die Schätzung P(»1«) = 1.
- Hat man den Verdacht, dass die Münze nicht ideal ist, hält aber die Maximum-Likelihood-Schätzung für zu radikal, dann bietet die Folgeregel einen Kompromiss an, nämlich $p = \frac{10+1}{10+2} = \frac{11}{12}$. Mit jedem weiteren Einswurf wird man die Vermutung für p in Richtung Maximum-Likelihood-Prinzip modifizieren. Sind nämlich sowohl die Anzahl w der Treffer als auch die Anzahl n der Versuche sehr groß,

---

[18] BOOLE (1854), S. 369 – VENN (1866), S. 197 – BERTRAND: *Calcul des Probabilités* (1889), S. 174

[19] Gemeint ist KARL PEARSON.

[20] DE MORGAN: Artikel in *Cabinet Encyclopedia*, S. 64 – JEVONS: *Principle of Science* (1874), S. 297 – LOTZE: *Logic* (1884), S. 373f. [Engl. Übersetzung von *Logik* (1874)] – CZUBER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1908), Bd. I, S. 199 – PEARSON: *Philosophical Magazine* (1907), S. 365–378

dann gilt für die LAPLACE'sche Formel $\frac{w+1}{n+2} \approx \frac{w}{n}$.

Man erhält also den Wert, den das Maximum-Likelihood-Prinzip liefert. Deutliche Unterschiede zwischen den Werten der Folgeregel und dem Maximum-Likelihood-Wert ergeben sich nur bei kleinen Werten für w und n.

8 Anhänge

A 1: Partielle Integration und Rekursion

Aus dem Integral $I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 x^\alpha \cdot (1-x)^\beta \cdot \mathrm{d}x$ erhält man durch partielle Integration

$$I_{\alpha,\beta} = \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \cdot (1-x)^\beta\right]_0^1 + \frac{\beta}{\alpha+1} \cdot \int_0^1 x^{\alpha+1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \cdot \mathrm{d}x = 0 + \frac{\beta}{\alpha+1} \cdot I_{\alpha+1,\beta-1}.$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel ergibt sich

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{\beta}{\alpha+1} \cdot \frac{\beta-1}{\alpha+2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\alpha+\beta} \cdot I_{\alpha+\beta,0}. \qquad (*)$$

Nun ist $I_{\alpha+\beta,0} = \int_0^1 x^{\alpha+\beta} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$

Setzt man diesen Wert in (*) ein und erweitert mit $\alpha!$, so ergibt sich

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha! \cdot \beta!}{(\alpha+\beta+1)!}.$$

A 2: Grenzwertberechnung

Es ist zu zeigen, dass $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m i^{n+1}}{\sum_{i=1}^m i^n} = \frac{n+1}{n+2}$. (G)

Man versucht, für den Ausdruck im Limes eine Doppelungleichung der Art

$$u_m \le \frac{1}{m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m i^{n+1}}{\sum_{i=1}^m i^n} \le o_m$$

zu finden.

Wenn die beiden Schranken u_m und o_m denselben Grenzwert für $m \to \infty$ haben, dann ist dies auch der Grenzwert des Ausdrucks. Da Zähler und Nenner des Bruchs von derselben Bauart sind, suchen wir dafür eine untere und eine obere Schranke. Dazu bedienen wir uns der Integralrechnung und betrachten den Graphen von $y = x^n$.

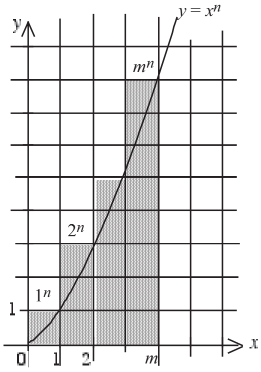


Fig. 3

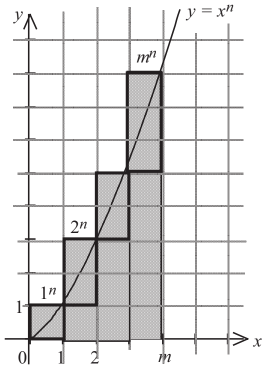


Fig. 4

Das Integral dieser Funktion ergibt sich zu $\int_0^m x^n \cdot \mathrm{d}x = \frac{m^{n+1}}{n+1}$.

Der Nenner $\sum_{i=1}^m i^n$ des Bruchs in (G) ist gleich dem Inhalt der grau schraffierten Fläche in Figur 3; als Obersumme des Integrals ist er mindestens so groß wie das Integral.

Aus Figur 3 erkennt man: Die Obersumme ist gleich dem Integral, vermehrt um den Inhalt der grau schraffierten Fläche, die über der Kurve zu $y = x^n$ liegt. Dieser ist wiederum kleiner als der Inhalt der stark umrandeten Rechtecke, die zusammen – wie man leicht mit Hilfe von Figur 4 einsieht – den Wert m^n haben. Also gilt insgesamt für den Nenner

$$\frac{m^{n+1}}{n+1} \le \sum_{i=1}^m i^n \le \frac{m^{n+1}}{n+1} + m^n. \qquad \text{(G1)}$$

Analog gilt für den Zähler $\sum_{i=1}^m i^{n+1}$ mit $n+1$ an Stelle von n

$$\frac{m^{n+2}}{n+2} \le \sum_{i=1}^m i^{n+1} \le \frac{m^{n+2}}{n+2} + m^{n+1}. \qquad \text{(G2)}$$

Damit kann man für den Bruch $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} i^{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} i^{n}}$ eine untere und eine obere Schranke angeben. Für die untere Schranke nimmt man den kleinstmöglichen Wert für den Zähler (linke Seite von (G2)) und den größtmöglichen Wert für den Nenner (rechte Seite von (G1)). Für die obere Schranke geht man gegengleich vor. Somit gilt

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{\dfrac{m^{n+2}}{n+2}}{\dfrac{m^{n+1}}{n+1}+m^{n}} \le \frac{1}{m}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} i^{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} i^{n}} \le \frac{1}{m}\cdot\frac{\dfrac{m^{n+2}}{n+2}+m^{n+1}}{\dfrac{m^{n+1}}{n+1}}.$$

Kürzt man die Brüche links und rechts jeweils mit m^{n+1}, so erhält man:

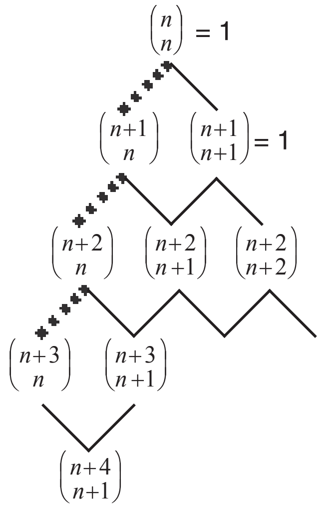
$$\frac{\dfrac{1}{n+2}}{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{m}} \le \frac{1}{m}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} i^{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} i^{n}} \le \frac{\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{m}}{\dfrac{1}{n+1}}$$

Für $m \to \infty$ erhält man wegen $\dfrac{1}{m} \to 0$ links und rechts den gleichen Bruch $\dfrac{n+1}{n+2}$, der somit der in (G) gesuchte Grenzwert ist.

A 3: Binomialformel $\sum\limits_{i=n}^{m}\binom{i}{n}=\binom{m+1}{n+1}$

Die Summe $\sum\limits_{i=n}^{m}\binom{i}{n}$ lässt sich im Arithmetischen Dreieck als Summation »parallel zum linken Rand schräg nach unten« veranschaulichen (Figur 5).

Zum Beweis benützen wir $\binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{n+1}$ und verwenden wiederholt das arithmetische Bildungsgesetz $\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1}=\binom{n+1}{i+1}$ der Binomialkoeffizienten.



Figur 5: Summation von Binomialkoeffizienten parallel zum linken Rand schräg nach unten. Gezeigt ist eine Summe mit vier Summanden und der Summenwert.

$$\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{m}{n}$$

$$=\underbrace{\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}}_{\binom{n+2}{n+1}}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{m}{n}$$

$$=\underbrace{\binom{n+2}{n+1}+\binom{n+2}{n}}_{\binom{n+3}{n+1}}+\binom{n+3}{n}+\ldots+\binom{m}{n}$$

Man fährt so fort und erhält schließlich

$$\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}=\binom{m}{n+1}+\binom{m}{n}=\binom{m+1}{n+1}\text{, q. e. d.}$$

Formal sauber wird die Beziehung durch vollständige Induktion bewiesen.

Einen anderen Weg zum Nachweis dieser Beziehung findet man bei ARTHUR ENGEL (Engel 1987, S. 151 ff.).

Literatur

Bayes, Th. (1764): An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr Price in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S. In: *Philosophical Transactions* (1763), 53, S. 370–418. London.

Bobek, K. J. (1891): Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Stuttgart: Julius Maier.

Boole, G. (1854): An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. London: Macmillan.

Buffon, G. L. Le Clerc de (1777): Essai d'Arithmétique morale. In: *Histoire naturelle, générale et particulière*, Supplément 4, S. 46–148. Paris: Imprimérie Royale.

Butler, J. (1736): The Analogy of Religion, Natural and Revealed, to the Constitution and Course of Nature. Dublin: J. Jones.

Cournot, A. A. (1843): Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités. Paris: Librairie de la Hachette.

Czuber, E. (1902): Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerrechnung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig: Teubner.

Daston, L. (1988): Classical Probability in the Enlightenment. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Engel, A. (1987): Stochastik. Stuttgart: Ernst Klett.

Fichtenholz, G. ([10]1990): Differential- und Integralrechnung 2. Thun usw.: Verlag Harri Deutsch (russisches Original 1959).

Hald, A. (1998): A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930. New York: John Wiley & Sons.

Historisches Lexikon der Schweiz (HLS). Erscheint seit 2002. Basel: Schwabe.

Hume, D. (1739): A Treatise of Human Nature : Being An Attempt to introduce the experimental Method of Reasoning into Moral Subjects. Printed for John Noon, at White-Hart, near Mercer's Chapel, in Cheapside. London. – Deutsche Übersetzung (2004): Traktat über die menschliche Natur. Berlin: Xenomos.

Hume, D. (1748): Philosophical Essays concerning Human Understanding. London.

Keynes, J. M. (1921): A Treatise on Probability. London: Macmillan.

Laplace, P. S. de (1774): Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards (vorgelegt 5.2.1772). In: *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie Royale des Sciences de Paris (1772)*, Band VI, S. 353–371.

Laplace, P. S. de (1786): Suite du Mémoire sur les approximations des Formules qui sont fonctions de très-grands Nombres. In: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris. Année 1783. Avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année. Tirés de Registres de cette Académie.* Paris: Imprimerie Royale.

Laplace, P. S. de (1812): Théorie Analytique des Probabilités. Paris: Mme Ve Courcier.

Laplace, P. S. de (1814): Essai philosophique sur les Probabilités. Paris: Mme Ve Courcier – Deutsche Übersetzung nach der 5. Auflage: Mises, R. v. (Hg.) (1932): Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 233. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Prevost, P. / Lhuilier, S. A. J. (1799a): Mémoire sur l'art d'estimer la probabilité des causes par les effets. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres depuis l'avénement de Frédéric Guillaume II au trône*. Classe de Philosophie Spéculative (1796). Berlin: George Decker.

Prevost, P. / Lhuilier, S. A. J. (1799b): Sur les Probabilités. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres depuis l'avénement de Frédéric Guillaume II au trône*. Classe de Mathématique (1796). Berlin: George Decker.

Prevost, P. / Lhuilier, S. A. J. (1799c): Remarques sur l'utilité & l'étendue du principe par lequel on estime la probabilité des causes. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres depuis l'avénement de Frédéric Guillaume II au trône*. Classe de Philosophie Spéculative (1796). Berlin: George Decker.

Terrot, Ch. H. (1853): Summation of Compound Series, and its Application to a Problem in Probabilities. In: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 20, 4.

Venn, J. (1866): The Logic of Chance. An Essay on the Foundations and Province of the Theory of Probability, with especial Reference to its Applications to moral und social Science. London and Cambridge: Macmillan an Co.

Zabell, S. L. (1988): Buffon, Price, and Laplace: Scientific Attribution in the 18th Century. In: *The Archive for History of Exact Sciences*, 39, 2.

Dank

Die Autoren danken dem wissenschaftlichen Gutachter MANFRED BOROVCNIK für die hilfreichen Einwände und Anregungen.

Anschriften der Verfasser

Friedrich Barth
Abbachstraße 23
80333 München
e.f.barth@t-online.de

Rudolf Haller
Nederlinger Straße 32a
80638 München
rudolf.haller@arcor.de